ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 2000
Seria : GÓRNICTWO z. 246 Nr kol. 1480

Eugeniusz BOBULA
Akademia Górniczo-Hutnicza, Kraków

ANALIZA TĄPNIĘCIA

Streszczenie. Osobliwy ruch górotworu jest analizowany przez układ równań różniczkowych: równanie dynamiczne, równanie ciągłości, równanie dyfuzji w przestrzeni dystrybucji. Rozważania Knothego i jego rozwiązanie dało nam kinematyczną formułę ruchu górotworu. Hipoteza Awierszyna daje nam siłę (gradient ciśnienia) w continuum. Punkt osobliwy w continuum daje nam podobszar, gdzie mamy punkt i moment tąpnięcia.

THE ROCKBURST ANALYSIS

Summary. The singular moving of rock mass can be analysed by the system of differential equations: the dynamic equation for continuum, the continuity equation, the diffusion equation in the space of distributions. The Knothe considerations and his solution give us the kinamatical form of moving of the rock mass. The Awierszyn hypothesis can give us the force (gradient of pressure) in continuum. The singular point in continuum gives us the domain where we have the point and the time of rockburst.

1. Wstęp

a) Problem dyfuzyjno-dynamiczny

Równanie Bobuli-Fouriera pogodziło sprzeczne teorie dynamiki Newtona i kinematyki Fouriera. Skutkiem tej uzyskanej zgodności była [1] możliwość napisania dyfuzyjno-dynamicznego układu równań. Napiszmy ten układ [1]:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial v}{\partial t}+\partial^{v} v=-\frac{\nabla \Pi}{p},\\
&\frac{\partial p}{\partial t}+div(pv)=0, \qquad (1.1)\\
&\frac{\partial p}{\partial t}-\Delta p=0, \quad w \quad \Omega \setminus \Phi, \; mes\,\Phi=0 \; w\, \Omega
\end{aligned}
$$

p, v, Π -gęstość, prędkość; ciśnienie pola.

b) Opis niecki osiadania

Fenomenologiczny opis niecki powyrobiskowej przedstawiony przez Knothego jest efektem adaptacji rozwiązania problemu Cauchy'ego dla równania Fouriera. Adaptacja ta, chociaż wynikała z głębokich spostrzeżeń dotyczących zachowania się niecek, nie jest wolna od mankamentów. O tym później.

Napiszmy postać niecki Knothego:

$w(x;t_{as}) = F\,(\varphi(\xi) = \text{const},$ F - odpowiedni funkcjonał,

która jest rozwiązaniem Cauchy'ego równania:

$$\frac{\partial w(x,t)}{\partial t} = \Delta w(x,t) \quad \text{dla } t = t_{as}$$

Te wstępne rozważania są wystarczające dla przeprowadzenia dalszego wywodu. Równanie Bobuli-Fouriera, jako zgodne z równaniem dynamiki Newtona, pozwala na wspólne, niesprzeczne użycie równań Newtona w postaci Eulera i dyfuzji, do szukania rozwiązań dynamicznych.

Uwaga - równanie Eulera dotyczy dynamiki ośrodka nielepkiego, jednak dyskretyzacja ośrodka (a takim jest górotwór) może równania Eulera doprowadzić do postaci znacznie ogólniejszej od równania Naviera-Stokesa.

Tematu tego nie rozwiniemy. Przedstawimy w innej publikacji.

2. Główny rezultat

Niecka Knothego jest rozwiązaniem równania

$$\frac{\partial w}{\partial t} - A\,\Delta w = 0, \tag{2.1}$$

wobec tego po odpowiednich przekształceniach:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - A^2 \Delta^2 w = 0, \quad t \to t_{as}, \tag{2.2}$$

Jednakże asymptotyka Knothego nie jest asymptotyką Cauchy'ego $t \to \infty$. Wobec tego za stabilizację niecki Knothego może być odpowiedzialny pewien człon dodatkowy w równaniu. Napiszmy je:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = A \Delta w + H(w), \tag{2.3}$$

Wtedy:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = A^2 \Delta^2 w + AH(w) + \frac{\partial H}{\partial t}, \tag{2.4}$$

Zauważmy, że $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial v_z}{\partial t}$, gdzie v_z - prędkość pionowa punktów górotworu.

Przyjmiemy koncepcję Awierszyna, że przemieszczenia poziome mają postać:

$$s_x = A_x \frac{\partial w}{\partial x}, \quad s_y = A_y \frac{\partial w}{\partial y}, \tag{2.5}$$

Możemy wówczas napisać równanie Eulera dla $\upsilon \in R^3 \cap z=0$:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \partial^v v = -\frac{\nabla \Pi}{p}, \quad v = \left(\frac{\partial w}{\partial t}, A_x \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t}, A_y \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial t} \right) \tag{2.6}$$

Wobec tego dla składowej pionowej otrzymamy :

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \sum_{i=1}^{2} v_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right) = -\frac{\nabla \Pi}{p}, \quad z = x_3, \tag{2.7}$$

czyli zakładając p = const = 1 dostajemy:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=-\frac{\partial \Pi}{\partial z}-A\sum_{i=1}^{2}A_{x_i}\frac{\partial w}{\partial x_i}\Delta\left(\frac{\partial w}{\partial x_i}\right)+\frac{dH(w)}{dw}\sum_{i=1}^{2}A_{x_i}\left(\frac{\partial w}{\partial x_i}\right)^2, \tag{2.8}$$

skąd

$$A^2\,\Delta w+\Delta F(w)+\frac{\partial \Pi}{\partial z}=A\sum_{i=1}^{2}A_{x_i}\frac{\partial w}{\partial x_i}\Delta\frac{\partial w}{\partial x_i}+\frac{dH(w)}{dw}\sum_{i=1}^{2}A_{x_i}\left(\frac{\partial w}{\partial x_i}\right)^2-\frac{\partial H}{\partial t}, \tag{2.9}$$

W celu wyznaczenia poziomych wartości $\frac{\partial \Pi}{\partial x_i}$, i = 1,2 postępujemy identycznie, znajdując w efekcie ciśnienie. Najbardziej interesuje nas rozwiązanie w pobliżu ekstremalnych naprężeń, aby można było znaleźć warunki utraty stateczności przez górotwór.

3. Problem dystrybucyjnej formuły niecki

W przypadku (nieuniknionej) adaptacji równania Bobuli-Fouriera problem niejednorodności H (w) może się nie pojawić w formule funkcyjnej, gdyż równanie to może uzyskać chwilową (definicyjną) stabilizację $\frac{\partial w}{\partial t}=0$ (nieróżniczkowalny punkt ekstremalny) dla ekstremalnego zasięgu wpływów niecki w sensie jej również nieróżniczkowalnego ekstremum. Omówmy kwestię: $\frac{\partial\|\lambda\|}{\partial t_{t\to t'}}<0 \cap \frac{\partial\|\lambda\|}{\partial t_{t\to t_0}}>0$, $\|\lambda\|$ - zasięg wpływów niecki. W tym sensie definiujemy pochodną w punkcie ekstremalnym x_0 jako zero. A zatem chwila t = t_{as} stanowiłaby odpowiednik stanu asymptotycznego dla Knothego i ustalałaby największy zasięg wpływów niecki. Nośnik H(w) byłby zbiorem miary zero, zatem w sensie funkcyjnym niejednorodność H byłaby zerem (w sensie dystrybucyjnym nie będziemy jej zapisywać).

A zatem rozwiązywać będziemy jednorodne równanie transportu (2.1), ale w sensie dystrybucyjnym. Wobec tego poszukiwać będziemy rozwiązania równania (2.1) z warunkami:

$$w_{\|\lambda\|}=0 \tag{3.1}$$

$$\int_{\Omega}(x,t)dx=const, \qquad \{\partial\Omega\}=\{\|\lambda\|\} \tag{3.2}$$

Z rozwiązań przedstawionego problemu możemy znaleźć ważne dla zagadnienia ciśnienie w górotworze.

Dużo do problemu może wnieść rozważanie niecki w $R^1 \times R^1$, ale problemu tego nie przedstawimy w pracy obawiając się jej zaciemnienia.

4. Historia wyrobiska a kształt niecki

Niecka Knothego jako problem Cauchy'ego dla funkcji analitycznej nie uwzględnia historii wyrobiska. Powstaje pytanie, jak wyglądać powinna analityczna niecka Knothego. uwzględniająca historię wyrobiska. Odpowiedź jest oczywista. Jest sumą niecek analitycznych przesuniętych w czasie, będącym historią wyrobiska. Napiszmy:

$$w(x;t_{as})=\sum_{i-1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{A(t-\tau_i)}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)e^{\frac{(x-\xi-v\tau_i)^2}{4A(t-\tau_i)}}d\xi\,, \tag{4.1}$$

wobec czego:

$$w(x;t_{as})=\int_0^{\tau_k}\frac{1}{\sqrt{A(t-\tau_i)}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{\frac{(x-\xi-v\tau_i)^2}{4A(t-\tau_i)}}\varphi(\xi)d\xi d\tau\,, \tag{4.2}$$

τ_k - czas budowy wyrobiska.

Rachunek ten jest niewyrażalny przez funkcje elementarne i musi być analizowany numerycznie. Jednakże daje on właściwy kształt niecki w odniesieniu do założeń jej analityczności. Jednak gdyby taka istniała, to nie może ona być analityczna (choćby z powodów (3.1),(3.2)).

Wobec tego powyższy rachunek musi zostać wykonany na dystrybucyjnych rozwiązaniach równania Bobuli-Fouriera.

Powstaje pytanie o zgodność założeń Awierszyna z założeniem średniej stałej gęstości ośrodka. Nie jest łatwo na pytanie takie odpowiedzieć. Gdyby założenie naruszało warunki układu, przyjmiemy je jedynie lokalnie w otoczeniu osobliwej rozmaitości.

5. Wnioski

Koncepcja Awierszyna jako dodatkowy warunek eliminuje równanie ciągłości, dając w zamian informację o przybliżonej stałości gęstości transportowanej masy. Korzystamy z tego warunku dla z = 0. Zachodzi pytanie, czy dla innych „z" koncepcja Awierszyna utrzyma się. Odpowiedzi na takie pytanie oczywiście udzielić nie można. Załóżmy, że się utrzyma i przeanalizujemy zastosowanie wniosków po uczynieniu takiego założenia. Koncepcja Awierszyna w odniesieniu do problemu dystrybucyjnego daje nam nieciągłość przesunięć poziomych na osobliwości Φ równania Bobuli-Fouriera. Stan teorii niecki nie jest tak dobry, by odpowiedzieć, czym jest ta rozmaitość. Zatem przyjmiemy, zgodnie z geodezyjnymi pomiarami, że jest to powierzchnia największych naprężeń dla niecki. Dane te znamy z powierzchni. Co dzieje się w głębi górotworu?

Niewątpliwie zbiór rozmaitości zmierza do wyrobiska na jego poziomie. Skąd zatem tąpnięcie?

Otóż linia nieciągłości przesunięć poziomych, uwaga, z dystrybucyjnej formuły wynika nieciągłość $\frac{\partial w}{\partial x_i}$, czyli po prostu rozerwanie ośrodka, daje nam łagodne obniżanie się masy górotworu nad wyrobiskiem. Pojawienie się sztywnej belki powoduje katastrofę w momencie przekroczenia jej wytrzymałości. Po pewnym czasie jej pęknięcie powoduje zmianę rozkładu masy i jej transport niezgodnie z warunkami minimum potencjału wytworzonego ciągłym obniżaniem się materiału na obszarze bliskim osobliwej rozmaitości. Następuje niekontrolowany transport masy.

Powstaje problem umiejscowienia katastrofy i czas jej wystąpienia. Rozwiązanie tego zagadnienia zależeć będzie od znajomości osobliwych rozmaitości oraz znanej statyki wytrzymałej belki, która pojawi się w trakcie postępu prac w wyrobisku. Zatem wymagane będzie poważne podejście do dystrybucyjnego transportu masy.

Istotny jest również fakt potraktowania niecek dla poziomów niezerowych w sensie probabilistycznym. Ponadto „linia" nieciągłości stanowi powierzchnię w R^3, która jest linią zamkniętą na poziomie zerowym i na poziomie wyrobiska. Na poziomie wyrobiska zmierza ona do granicy obszaru wyrobiska. Dla znalezienia momentu utraty stabilności belki potrzebny jest chociaż jakościowy przebieg - wklęsły, wypukły w płaszczyźnie pionowej, przekroju tej powierzchni. Z braku danych na razie przyjmiemy jej liniowy przebieg, wyznaczony przez odpowiednie proste.

LITERATURA

1. Bobula E.: On the reversible diffusion problem, Fasc. Math. No. 26, 1996.

2. Bobula E.: On certain relations between Newton equation and Maxwell equations, Univ. Iagcll. Acta Math. F. XXXII, 1995.

Recenzent: Prof. zw. dr hab. inż. Mirosław Chudek

Abstract

Some mathematical problems in describing rockburst occuring have been presented in this paper. The singular moving of rock mass can be analysed by the system of differential equations: the dynamic equation for continuum, the continuity equation, the diffusion equation in the space of distributions. The Knothe considerations and his solution give us the kinematical form of moving of the rock mass. The Awierszyn hypothesis can give us the force (gradient of pressure) in continuum. The singular point in continuum gives us the domain where we have the point and the time of rockburst.