

RDITT-mpI.24.09.2024r.

M. Skonj

prof. dr hab. inż. Khalid Saeed  
Wydział Informatyki  
Politechnika Białostocka  
ul. Wiejska 45A, 15-351 Białystok  
Tel. (+48-85) 746 9196  
[k.saeed@pb.edu.pl](mailto:k.saeed@pb.edu.pl)

Białystok, 16.09.2024 r.

RECENZJA rozprawy doktorskiej

**mgr inż. Magdaleny Wilkołazkiej**

z Wydziału Automatyki, Elektroniki i Informatyki  
Politechniki Śląskiej

z tytułu *Interpolacja Danych Zredukowanych na Bazie Krzywych  
Wielomianowych Trzeciego Stopnia*

Promotor:

dr hab. Ryszard Kozera, prof. SGGW  
Instytut Informatyki Technicznej  
Szkoła Główna Gospodarstwa Wiejskiego w Warszawie

Niniejszą recenzję przygotowałem na zlecenie zawarte w piśmie z dnia 01.08.2024, które otrzymałem od profesora Andrzeja Polańskiego Przewodniczącego Rady Naukowej Dyscypliny Informatyka Techniczna i Telekomunikacja Politechniki Śląskiej na podstawie uchwały Rady nr 29/2024, podjętej dnia 30.07.2024 r.

## I. Zawartość rozprawy

Tematyka rozprawy doktorskiej mgr inż. Magdaleny Wilkołazkiej dotyczy zagadnień interpolacji wielomianami sklejanymi stopnia trzeciego dla danych zredukowanych. Głównym celem badawczym pracy było zbadanie i rozwiązanie problemu modelowania krzywych parametrycznych oraz oszacowania ich trajektorii poprzez zastosowanie różnych schematów interpolacyjnych (tzn. kubicznych funkcji sklejaných klasy  $C^k$ ,  $k=0,1,2$ ) na bazie zredukowanych danych  $Q_m$ . Te ostatnie reprezentują ciąg punktów interpolacyjnych  $q_i = \gamma(t_i)$ ,  $i=1,2,\dots,m$ , zawartych w dowolnej przestrzeni Euklidesowej. Brakujące węzły interpolacyjne  $t_i$  ( $i=1,2,\dots,m$ ) zastąpione są tu nowymi węzłami  $\hat{t}_i$  ( $i=1,2,\dots,m$ ) wyrażonymi w terminach  $Q_m$  przy użyciu tzw. parametryzacji wykładniczej zależnej dodatkowo od parametru  $\lambda \in [0,1]$ . Doktorantka zbadła jakość, rzędy zbieżności z ostrością każdego omawianego kawałkami kubicznego interpolanta  $\hat{\gamma}$  do nieznanej krzywej  $\gamma$  za pomocą parametryzacji wykładniczej zastępującej nieznane węzły.

Autorka przedstawiła nowe użyteczne twierdzenia, metody i algorytmy, testy numeryczne oraz przykłady ilustracyjne, by udowodnić swoje założenia i tezy pracy. W rozprawie pokazano przydatność omawianej teorii w konkretnych zastosowaniach takich, jak w modelowaniu krzywych w grafice komputerowej oraz analizie zdjęć USG.

Rozprawa ma charakter teoretyczno-doświadczalny. Zawiera 197 stron formatu A4 - tekstu, równań matematycznych, rysunków, tabel i ilustracji. Składa się z siedmiu rozdziałów, bibliografii oraz trzech dodatków jako spisy rysunków i tabel oraz skorowidza.

Rozdział 1. to „Streszczenie”, gdzie autorka przedstawia wstęp do tematyki rozprawy, podając opis zawartości rozdziałów, najważniejsze oznaczenia i definicje występujące w pracy oraz cele badawcze rozprawy. W tym rozdziale autorka wymienia swoje cztery twierdzenia jako tezy pracy do udowodnienia w swojej rozprawie. Nazwa rozdziału jest nietypowa – *streszczenie pracy* oznacza w pewnym stopniu jej abstrakt. Bardziej by odpowiadała nazwa *Wprowadzenie*.

Rozdział 2. „Podstawowe pojęcia, definicje i twierdzenia” wprowadza podstawowe zagadnienia analizy matematycznej i numerycznej oraz geometrii różniczkowej, porównanie interpolacji nieparametrycznej z parametryczną oraz definicje dotyczące próbkowania krzywych.

W rozdziale 3. „Przedziałowo-kubiczna interpolacja klasy  $C^0$  i parametryzacja wykładnicza” autorka opisuje przedziałowo-kubiczną interpolację Lagrange’a  $\hat{y}^l$ , gdzie wielomiany kubiczne  $\hat{y}^l$  w punktach łączenia  $q_0, q_3, q_6, \dots, q_{m-3}$  są tylko klasy  $C^0$ . Autorka przeanalizowała nieparametryczną interpolację przedziałowo-kubiczną klasy  $C^0$  na bazie wielomianu Lagrange’a stopnia trzeciego przy zastosowaniu parametryzacji wykładniczej z  $\lambda \in [0,1]$ .

Rozdział 4. „Przedziałowo-kubiczna interpolacja klasy  $C^1$  i parametryzacja wykładnicza” skupia się na zmodyfikowanej przedziałowo-kubicznej interpolacji Hermite’a. Doktorantka podała i udowodniła twierdzenie o rzędzie zbieżności i jego ostrości dla interpolacji Hermite’a wraz z parametryzacją wykładniczą.

Warto nadmienić, iż tematyka rozdziałów 3. i 4. jest istotnym rozszerzeniem części wyników uzyskanych w monografii habilitacyjnej promotora dr. hab. Ryszarda Kozery (promotora doktorantki), w której dowodzi się analitycznie i potwierdza numerycznie czwarty rząd zbieżności dla sklejanego wielomianu kubicznego Lagrange’s oraz dla zmodyfikowanego wielomianu kubicznego Hermite’a dla  $\lambda=1$  [*Curve modeling via interpolation based on multidimensional reduced data*, R. Kozera, *Studia Informatica*, Volume 25, Number 4B(61), pp. 1-140, 2004].

Rozdział 5. „Interpolacja przedziałowo-kubiczna splajnami klasy  $C^2$  i parametryzacja wykładnicza” prezentuje, jako główny wynik pracy, twierdzenie o rzędzie zbieżności interpolanta do nieznannej krzywej oraz odpowiednią hipotezę (Hipoteza 5.3), potwierdzone testami numerycznymi.

Doktorantka opisuje wyniki obliczeń i eksperymentów dla dwóch typów splajnów naturalnego i zmodyfikowanego splajna zupełnego.

Rozdział 6. „Zastosowania danych zredukowanych w modelowaniu krzywych w grafice komputerowej i analizie obrazów USG” pokazuje wybrane praktyczne zastosowania prezentowanych interpolacji do analizy obrazu medycznego i rekonstrukcji brakujących klatek w filmie. Autorka zaprezentowała dwa możliwe zastosowania omawianej tematyki do segmentacji i analizy obrazu nerki oraz w modelowaniu obrazu do odtworzenia filmu z klatek utworzonych w wyniku oddziaływania źródła światła na wybraną powierzchnię.

W Rozdziale 7. „Podsumowanie i dalsze perspektywy badań” doktorantka podsumuje rozprawę i podaje swoje wnioski wynikające z przeprowadzonych badań. Autorka konkluduje, iż interpolacja nieparametryczna w połączeniu z parametryzacją wykładniczą daje dobre możliwości szacowania trajektorii nieznanymi krzywych zadanych tylko w postaci danych zredukowanych.

Całość pracy kończy „Bibliografia”, która zawiera 49 pozycji, 10 z nich współautorstwa doktorantki. Literatura jest starannie wybrana - referaty i artykuły światowe pokazujące stan wiedzy na temat interpolacji danych zredukowanych.

Ciekawym aspektem redakcyjnym pracy jest to, że każdy rozdział kończy się podsumowaniem. Jednak nie we wszystkich rozdziałach autorka pisze o osiągnięciach wymienionych w danym rozdziale (patrz podsumowania rozdziałów 2. i 5.).

## **II. Opinia o rozprawie doktorskiej**

Ocena rozprawy doktorskiej pani Magdaleny Wilkołazkiej ocenę z punktu widzenia technicznego i merytorycznego oraz klarowności i czytelności manuskryptu.

Doktorantka wykazała w swojej pracy dobrą znajomość zagadnień naukowych i przedstawiła swoje wyniki w sposób przekonujący. Rozwiązania problemów i założeń teoretycznych oraz hipotez zostały udowodnione zarówno matematycznie jak i eksperymentalnie. Cytowana literatura jest prawidłowo dobrana. Praca jest interesująca, a naukowe osiągnięcia merytoryczne doktorantki są znaczne. Autorka poprawnie przedstawiła i wyjaśniła wszystkie definicje i twierdzenia wykorzystane w rozprawie i dotyczące tematyki zagadnień interpolacji danych zredukowanych.

Rozprawa napisana poprawnym językiem, czyta się ją dobrze, chociaż nie brakuje błędów edytorskich. Algorytmy, twierdzenia z dowodami, wymagane rysunki i tabele są prawidłowo opracowane. Istotne dla tematyki pracy zagadnienia interpolacji omówiono czytelnie.

Głównymi rezultatami pracy badawczej doktorantki, którymi udowodniła tezy swojej pracy są:

- Szczegółowa analiza przedziałowo-kubicznej interpolacji klasy  $C^{0,1}$  typu Lagrange'a i Hermite'a (w wersji zmodyfikowanej) oraz opracowanie odpowiednich twierdzeń z dowodami.
- Opracowanie kompletnej analizy interpolacji przedziałowo-kubicznej klasy  $C^2$  (typu zmodyfikowany splajn zupełny) wraz z twierdzeniami o rzędzie zbieżności interpolanta do nieznanej krzywej z odpowiednią hipotezą potwierdzoną testami numerycznymi.
- Uzasadnienie teoretyczne i eksperymentalne konieczności stosowania próbkowania mniej lub bardziej równomiernego. Opracowane wystarczające warunki dotyczące charakteru próbkowania  $t_i$  ( $i=1,2,\dots, m$ ) tak by  $\psi: [0, T] \mapsto [0, \hat{T}]$  było parametryzacją.

Uważam, że doktorantka znalazła istotne luki w stanie wiedzy dotyczące własności aproksymacyjnych (w tym rzędy zbieżności) interpolacji kawałkami kubicznej (klasy  $C^0$ ,  $C^1$  i  $C^2$ ) do nieznanej krzywej na bazie odgadywanych węzłów w takt parametryzacji wykładniczej zależnej od parametru  $\lambda \in [0,1]$ . Dotychczasowe wyniki określiły asymptotykę zbieżności tylko dla  $\lambda=1$  (rzęd 4), a doktorantka rozszerzyła te wyniki na pozostały zakres parametru  $\lambda \in [0,1]$  uzyskując za każdym razem liniowy rząd zbieżności. Dodatkowo korzystając z obliczeń symbolicznych oraz analizy teoretycznej potwierdzonej niezależnie testami numerycznymi wykazała zarówno ostrość powyższej asymptotyki jak i konieczność ograniczeń narzuconych na charakter próbkowania krzywej gamma (mniej lub bardziej równomierność) jak i jej analitycznych własności (regularność) dla całego zakresu  $\lambda \in [0,1]$ .

Dokonując recenzji rozprawy doktorskiej warto również zwrócić uwagę na jej słabe strony. Należą do nich, moim zdaniem, następujące punkty:

- Stan wiedzy, chociaż podany przejrzysto, nie jest wystarczający. Doktorantka mogłaby przeanalizować więcej pozycji z dedykowanej literatury w ramach analizy stanu wiedzy (np. wskazać na inne metody odgadywania węzłów).
- Brak algorytmicznego opisu przy większości teoretycznych twierdzeń i modeli matematycznych. Są opisy metodologii, ale raczej są czysto matematyczne.
- Str. 37: Podano informację o algorytmie wyznaczania stopnia zbieżności w przypadku szacowania trajektorii, ale bez szczegółowego opisu. Przydałby się schemat przepływu informacji lub pseudokod algorytmu w formie przybliżonej do programu komputerowego. W ten sposób doktorantka mogłaby pokazać swoje umiejętności informatyczne.
- Rozprawa nie jest wzbogacona szerokimi eksperymentami z zakresu zastosowań praktycznych. Poza dwoma z rozdziału 6. reszta eksperymentów numerycznych jest przeprowadzona na krzywych teoretycznych.
- W podsumowaniu rozdziału 2. autorka pisze o tym, co ma być zrealizowane w rozdziale 3. bez informacji o tym, co już zostało przeanalizowane w rozdz. 2. W podsumowaniu rozdziału 5. natomiast, autorka pisze o dalszych pracach,

które można podjąć, aby uzupełnić zagadnienia zawarte w tym rozdziale. Jest to nietypowe podejście do zawartości 5.4 *Podsumowania*.

#### **Drobne usterki:**

Autorka nie ustrzegła się pewnych nieścisłości lub prawidłowego przedstawiania ilustracji. Oto przykładowe redakcyjne uwagi:

- Wielokrotnie wielomian Hermite'a napisany jako Hermita.
- Opis tabeli zazwyczaj powinien znaleźć się nad tabelą. Jednak w pracy opisy tabel znajdują się przemiennie (patrz Tab. 11-17).
- Prawie wszystkie rysunki są pozbawione informacji o współrzędnych  $x, y$ . W niektórych przypadkach czytelnik musi długo zastanowić się zanim dojdzie do zrozumienia przekazanej na nich informacji.
- Rysunek 49. jest nieczytelny, informacja o krzywej regresji nie jest jasna.
- Str. 163: zawartość podrozdziału 5.3.2 Podsumowanie powinna się znaleźć w podrozdziale 5.4.
- Wzór (22):

$$\frac{\beta_0}{m} \leq t_i - t_{i-1} \leq \frac{\beta}{m} \quad (22)$$

powinien brzmieć:

$$\beta_0 \delta_m \leq t_i - t_{i-1} \leq \delta_m \quad (22)$$

zgodnie z poprzednimi i późniejszymi założeniami.

Powyżej wymienione uwagi mają charakter dyskusyjny i nie obniżają wartości rozprawy, jednakże chciałbym, żeby autorka ustosunkowała się do nich na obronie.

### **III. Merytoryczne osiągnięcia doktorantki**

Pani Magdalena Wilkołazka jest współautorką 12. recenzowanych referatów i artykułów opublikowanych w międzynarodowych czasopismach i konferencjach - wszystkie znajdują się na liście Ministerstwa Edukacji i Nauki. Są to 4 artykuły w recenzowanych czasopismach oraz 8 referatów zaprezentowanych na konferencjach międzynarodowych, 6 z nich jest opublikowanych w materiałach pokonferencyjnych, a 2 są w przygotowywaniu. Większa część też rozprawy została zaprezentowana we wspomnianych publikacjach. Oznacza to, iż problematyka rozprawy wpisuje się w bieżący trend zagadnień z dziedziny Informatyka. Większość publikacji jest przypisana do dyscypliny Informatyka Techniczna i Telekomunikacja na liście MNiSW.

### **IV. Wnioski końcowe**

Wystawiam pozytywną ocenę rozprawie doktorskiej mgr inż. Magdaleny Wilkołazkiej pt. *„Interpolacja Danych Zredukowanych na Bazie Krzywych*

*Wielomianowych Trzeciego Stopnia*". Stwierdzam, że praca spełnia wymagania i warunki nakładane przez ustawę o stopniach naukowych i wnoszę bez zastrzeżeń o dopuszczenie doktorantki do obrony pracy w celu uzyskania stopnia doktora nauk technicznych w dziedzinie nauk inżyniersko-technicznych w dyscyplinie Informatyka Techniczna i Telekomunikacja.



Khalid Saeed